ΠΡΑΞΕΙΣ

ΟΡΟΣ	παράγοντας
Οι ***όροι*** ξεχωρίζουν με **+** ή **—** εκτός παρενθέσεων **Τίποτα: 0** **ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΙΑΦΟΡΑ**	Οι ***παράγοντες*** ξεχωρίζουν με **•** ή **:** εκτός παρενθέσεων **Τίποτα: 1** **ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΗΛΙΚΟ**

Ξεχωρίζουμε τους ***όρους*** και προσπαθούμε να τους κάνουμε «απλούς».

Σε κάθε όρο, ξεχωρίζουμε τους ***παράγοντες*** και τους κάνουμε «απλούς».

Μέσα στις παρενθέσεις, ισχύουν τα ίδια.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $\underline{25} + \underline{32 : 8} - \underline{\underline{5 \cdot 4}} = 25 + 4 - 20 = 29 - 20 = 9$

2) $(\underline{20 + 14 : 2}) - \underline{\underline{5 \cdot 4}} = (20 + 7) - 20 = 27 - 20 = 7$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΣ

- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (πράξεις)

  $2 \cdot (\chi + 3) = 2 \cdot \chi + 2 \cdot 3 = 2\chi + 6$

  $4 \cdot (\chi - 1) = 4 \cdot \chi - 4 \cdot 1 = 4\chi - 4$

- $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$ (αναγωγή ομοίων όρων / παραγοντοποίηση)

  $2 \cdot \chi - 4 \cdot \chi = (2 - 4) \cdot \chi = -2\chi$

  $4\psi + 3\chi - 2\psi + \chi = 4\psi - 2\psi + 3\chi + \chi = (4 - 2)\psi + (3 + 1)\chi = 2\psi + 4\chi$

  $3 \cdot \chi + 3 \cdot \psi = 3 \cdot (\chi + \psi)$

Αριθμητική 1 αριθμός → 1 θέση 3,14976…

ΑΛΓΕΒΡΑ 1 αριθμός → 2 θέσεις **+** ή **—** 3,14976…

ΠΡΟΣΗΜΟ

ΟΜΟΣΗΜΟΙ	**ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ**
ίδιο πρόσημο + 3, + 12 — 5, — 13	διαφορετικό πρόσημο + 7, — 4 — 6, +9

ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ

ομόσημοι → **κοινό πρόσημο** **ομόσημοι** → **ΠΡΟΣΘΕΣΗ**	**ετερόσημοι** → **πρ. μεγαλυτέρου** **ετερόσημοι** → **ΑΦΑΙΡΕΣΗ**

ΠΟΛ/ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ

ίδια	+ • + = +	**διαφορετικά**	+ • — = —
+	— • — = +	**—**	— • + = —

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

+6 + 5 + 3 + 5 = 19	–3 — 7 — 2 — 8 = –20
6 — 5 = +1	–6 + 5 = –1
(+3) · (+4) = +12	(–2) · (–7) = +14
(+5) · (–6) = –30	(–4) · (+5) = –20
+ 17 – 17 = 0	(+1/6) · (+6) = 1

ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ	**ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ**
+17, — 17 άθροισμα «0» «αλλάζω» μόνο το πρόσημο	–6, $-\frac{1}{6}$ γινόμενο «1» «αλλάζω» μόνο το νούμερο

ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

+ (. . . . . . .)	— (…….)
γράφω «ότι βλέπω»	γράφω «τα αντίθετα»

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

+ (–4 + 10 + 2 – 18 – 8) = – 4 + 10 + 2 – 18 – 8 = …

- (- 7 + 11 + 2 – 8 – 5) = +7 – 11 – 2 + 8 + 5 = …

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) –8χ + ω + 3ω + 2χ – χ = –8χ + 2χ – χ + ω + 3ω =
 = (–8 + 2 – 1)χ + (1 + 3)ω = –7χ + 4ω.

2) 5(2α – 3β) + 3(4β – α) = 10α – 15β + 12β – 3α =
 = 10α – 3α – 15β + 12β = (10 – 3)α + (–15 + 12)β = 7α – 3β.

3) Να υπολογίσετε την τιμή της αλγεβρικής παράστασης Α, όταν χ = –3.

Α = 2(χ + 3) – 4(χ – 1) – 8 = (επιμερισμός / πράξεις)
= 2χ + 6 – 4χ + 4 – 8 =
= 2χ – 4χ + 6 + 4 – 8 = (αναγωγή ομοίων όρων)
= –2χ + 2 = (**αντικατάσταση** χ = –3)
= –2(–3) + 2 =
= 6 + 2 = 8.

ΔΥΝΑΜΗ

ΔΥΝΑΜΗ α^ν : ένα ***γινόμενο*** με ίδιους ***παράγοντες***

α: ***βάση*** ν: ***εκθέτης***

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $\alpha^0 = 1$ $(\alpha \neq 0)$, $1^\nu = 1$, $\alpha^1 = \alpha$

βάση: αρνητική

εκθέτης άρτιος «+»	***εκθέτης*** περιττός «—»
$(-2)^4 = +16$	$(-2)^3 = -8$

ΠΡΟΣΟΧΗ $-2^4 = -16$

εκθέτης: αρνητικός $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$ $(\alpha \neq 0)$

$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3}$, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$,

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ *(ΓΙΝΟΜΕΝΟ / ΠΗΛΙΚΟ)*

ίδια βάση	***ίδιος εκθέτης***
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7 = -128$ $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$ $(+2)^4 : (+2)^2 = (+2)^{4-2} = (+2)^2 = 4$	$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$ $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$ $\alpha^\nu : \beta^\nu = (\alpha : \beta)^\nu$ $10^3 : 5^3 = (10 : 5)^3 = 2^3 = 8$

δύναμη σε δύναμη : $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

$(10^3)^5 = 10^{3 \cdot 5} = 10^{15}$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $(-6)^5 : 3^5 - 8^4 : (-4)^4 + 10^3 : (-5)^3 = (-6:3)^5 - [8:(-4)]^4 + [10 : (-5)]^3 =$

$= (-2)^5 - (-2)^4 + (-2)^3 = -2^5 - 2^4 + (-2^3) = -32 - 16 - 8 = -56.$

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

μεταβλητή : το γράμμα που χρησιμοποιούμε στη θέση ενός αριθμού όταν η τιμή ενός ποσού είναι άγνωστη ή μεταβάλλεται.

για παράδειγμα: 1) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού.
Παριστάνουμε με **χ** τον αριθμό και γράφουμε « 4χ »

2) Από έναν αριθμό αφαιρούμε το « 7 » και βρίσκουμε « 12 »
Παριστάνουμε με **α** τον αριθμό και γράφουμε « α – 7 = 12 ».

ΙΣΟΤΗΤΑ

Η **ισότητα** μας πληροφορεί ότι κάποιος αριθμός είναι ίσος με τον εαυτό του.

Π.χ. $5 = 5$, $5 = 4 + 1 = 10 / 2 = 15 - 10 = \ldots$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Η **ανισότητα** μας πληροφορεί ότι κάποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από κάποιον άλλον αριθμό.

Π.χ. $5 > 4$, $5 > 3 + 1$, $5 < 10$, $5 < 9 + 1$, κ.ά.

ΕΞΙΣΩΣΗ

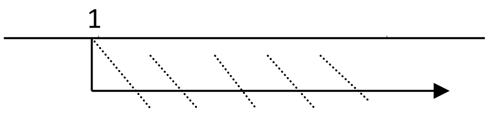
Η **εξίσωση** προκύπτει από την ισότητα,
περιλαμβάνει 2 ***μέλη*** και
ζητείται να βρούμε την τιμή ενός αγνώστου ώστε να είναι αληθής η ισότητα.

- Π.χ. $5 = 4 + χ$, λύση της εξίσωσης είναι : $χ = 1$ (επειδή $5 = 4 + 1$, $5 = 5$)

ΑΝΙΣΩΣΗ

Η **ανίσωση** προκύπτει από την ανισότητα, περιλαμβάνει 2 ***μέλη*** και ζητείται να βρούμε τις τιμές ενός αγνώστου ώστε να είναι αληθής η ανισότητα.

- Π.χ. $5 < 4 + χ$, οι λύσεις της ανίσωσης είναι : $χ > 1$
  (επειδή $5 < 4 + 3$ ή $5 < 4 + 10$ κ.ά.)



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

- προσθαφαίρεση με τον ίδιο αριθμό: αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \pm \gamma = \beta \pm \gamma$
- πολλαπλασιασμό με τον ίδιο αριθμό: αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$
- διαίρεση με τον ίδιο αριθμό: αν $\alpha = \beta$ $(\gamma \neq 0)$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$
- πρόσθεση 2 ισοτήτων: αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$
- πολλαπλασιασμός 2 ισοτήτων: αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ

- προσθαφαίρεση με τον ίδιο αριθμό: αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$
- πολλαπλασιασμό ή διαίρεση με τον ίδιο **θετικό** αριθμό:

  αν $\alpha > \beta$ $(\boldsymbol{\gamma > 0})$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

- πολλαπλασιασμό ή διαίρεση με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, **αλλάζοντας τη φορά**:

  αν $\alpha > \beta$ $(\boldsymbol{\gamma < 0})$ τότε $\alpha \cdot \gamma \boxed{<} \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} \boxed{<} \frac{\beta}{\gamma}$

- **αντιστρέφουμε** και τα δύο μέλη **αλλάζοντας την φορά**: αν $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} \boxed{<} \frac{1}{\beta}$
- μεταβατική ιδιότητα: αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$
- πρόσθεση **2** ανισοτήτων ίδιας φοράς: αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- πολλαπλασιασμός **2** ανισοτήτων ίδιας φοράς, ***μόνο με θετικούς***.

  αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$, (α, β, γ, δ: θετικοί)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Πρόσθεση 2 ισοτήτων κατά μέλη

$$
+\begin{cases} -\cancel{3}\chi + 6\psi = -18 \\ \cancel{3}\chi + 4\psi = 8 \end{cases}
$$

$$10\psi = -10$$

- αντιστροφή και των 2 μελών μιας ανισότητας: $8 > 5 \rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{5}$

ΕΞΙΣΩΣΗ α΄ ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $\boxed{\textbf{α΄ ΒΑΘΜΟΥ} \quad αχ + β = 0}$

- Αν η εξίσωση έχει παρονομαστές, χωρίς άγνωστο,
  κάνουμε **απαλοιφή παρονομαστών**
  πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών
- Αντιγράφουμε προσεκτικά ότι περισσεύει μετά τις απλοποιήσεις

- Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις
- **Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους**
  (Όποιος όρος περιέχει τον άγνωστο, είναι άγνωστος όρος)
  (Ότι αλλάζει μέλος, αλλάζει πρόσημο)
- Αναγωγή ομοίων όρων
- **Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου**
  (Συντελεστής του αγνώστου είναι ότι δεν είναι ο άγνωστος)
  (Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν).

---

0 · χ = 0 **Αόριστη εξίσωση**

επειδή όποιον αριθμό και αν βάλλουμε στη θέση του «χ» είναι αλήθεια.

Π.χ. 1) 0 · 3 = 0, 0 = 0 (α) 2) 0 · 4 = 0, 0 = 0 (α) κ.ά.

0 · χ = 10 **Αδύνατη εξίσωση**

επειδή κανένας αριθμός στη θέση του «χ» δεν την κάνει αλήθεια.

Π.χ. 1) 0 · 3 = 10, 0 = 10 (ψ) 2) 0 · 4 = 10, 0 = 10 (ψ) κ.ά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x + 1 \Leftrightarrow \cancel{6}^{3} \cdot \frac{x-1}{\cancel{2}} - \cancel{6}^{1} \cdot \frac{2x+1}{\cancel{6}} = 6 \cdot x + 6 \cdot 1 \qquad \boxed{\text{Ε.Κ.Π. (2, 6) = 6}}$$

$\Leftrightarrow$ 3(χ – 1) – (2χ + 1) = 6χ + 6 $\Leftrightarrow$ 3χ – 3 –2χ – 1 = 6χ + 6 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 3χ – 2χ – 6χ = 6 + 3 + 1 $\Leftrightarrow$ –5χ = 10 $\Leftrightarrow$ $\frac{-\cancel{5}x}{-\cancel{5}} = \frac{10}{-5}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{χ = –2}$

ΑΝΙΣΩΣΗ α΄ ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ $\boxed{\textbf{α΄ ΒΑΘΜΟΥ} \quad αχ + β < 0 \text{ ή } > 0}$

Η μέθοδος επίλυσης ανίσωσης α΄ βαθμού,

είναι ίδια με την μέθοδο επίλυσης εξίσωσης α΄ βαθμού.

- Όταν ***διαιρούμε με αρνητικό αριθμό***, ***αλλάζουμε την φορά*** της ανίσωσης.

Π.χ. $0 \cdot χ < 10$ ή $0 \cdot χ > -4$ **Αόριστη ανίσωση**

Π.χ. $0 \cdot χ > 10$ ή $0 \cdot χ > 10$ **Αδύνατη ανίσωση**

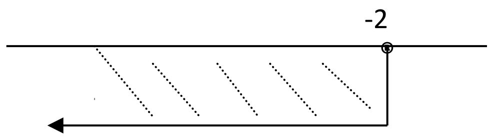
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} \ge x+1 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{2x+1}{6} \ge 6 \cdot x + 6 \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(χ – 1) – (2χ + 1) \ge 6χ + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3χ – 3 – 2χ – 1 \ge 6χ + 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3χ – 2χ – 6χ \ge 6 + 3 + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad –5χ \ge 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\cancel{5}x}{-\cancel{5}} \le \frac{10}{-5} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{χ \le –2}$$

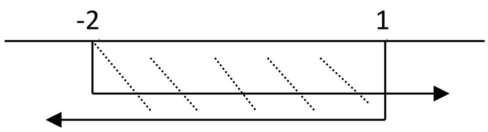


ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Ή ΚΟΙΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ με 1 άγνωστο

- Λύνουμε **χωριστά** κάθε ανίσωση (εξίσωση – διάφορο)
- Όλες οι λύσεις σε «**άξονα**», κάθε ανίσωση σε άλλο «**ύψος**»
- Βρίσκουμε **γραφικά** τις κοινές λύσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{cases} 2\chi + 1 \ge -3 \\ \chi + 6 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi \ge -3-1 \\ \chi \le 7-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi \ge -4 \\ \chi \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cancel{2}\chi}{\cancel{2}} \ge \frac{-4}{2} \\ \chi \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi \ge -2 \\ \chi \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$



Το **σύστημα** έχει την λύση: $\boxed{-2 \le χ \le 1}$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

$\sqrt{\vartheta} = \kappa$, $\kappa^2 = \theta$ ($\theta > 0, \kappa > 0$)

Π.χ. $\sqrt{25} = 5$, $5^2 = 25$

❖ **τετραγωνική ρίζα** θετικού αριθμού ***θ*** είναι ένας άλλος θετικός αριθμός ***κ***, όταν το τετράγωνο του ***κ*** μας δίνει τον αρχικό αριθμό ***θ***.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάτω από την ρίζα δεν βάζουμε ***ποτέ αρνητικό αριθμό*** ούτε βρίσκουμε αρνητικό αριθμό από ρίζα.
ΛΑΘΟΣ: $\sqrt{-9} = 3$, $\sqrt{9} = -3$

- $\sqrt{x^2} = |x|$ Π.χ. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{(-5)^{\cancel{2}}} = |-5| = 5$
- $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$ Π.χ. $\sqrt{5} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5+3}$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ Π.χ. $\sqrt{5} \bullet \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{15}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ Π.χ. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Υπολόγισε τις παρακάτω πράξεις:

- $\sqrt{5} + \sqrt{3} =$ ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ
- $15\sqrt{5} + 7\sqrt{3} + 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{3} = 20\sqrt{5} + 9\sqrt{3}$
- $\sqrt{81} - 2\sqrt{9} + \sqrt{121} - \sqrt{49} = 9 - 2 \bullet 3 + 11 = 14$

2) Υπολόγισε τον θετικό αριθμό χ στις εξισώσεις:`

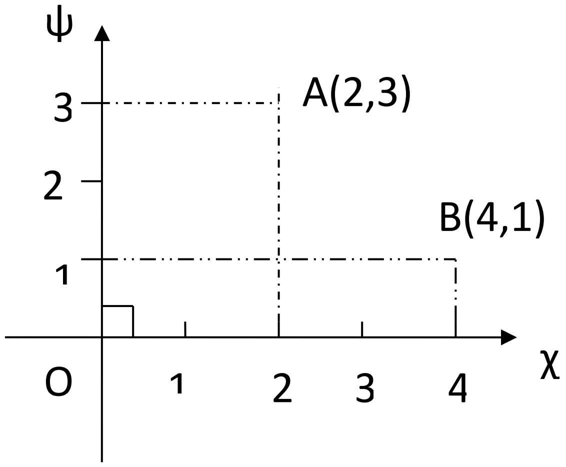
- $\chi^2 = 9 \rightarrow \chi = \sqrt{9} \rightarrow \chi = 3$
- $\chi^2 = \dfrac{100}{81} \rightarrow \chi = \sqrt{\dfrac{100}{81}} \rightarrow \chi = \dfrac{10}{9}$

3) $\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}} = \sqrt{13 + \sqrt{7+2}} = \sqrt{13 + \sqrt{9}} = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$

ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

ορθοκανονικό σύστημα αξόνων:
δύο κάθετες ευθείες
με την ίδια μονάδα μέτρησης.

αρχή των αξόνων → σημείο Ο
άξονας των χ → ευθεία χχ΄
άξονας των ψ → ευθεία ψψ΄.



- Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος αριθμών, ένα **διατεταγμένο ζεύγος** που λέγονται **συντεταγμένες.** ο πρώτος αριθμός : **τετμημένη** και ο δεύτερος αριθμός : **τεταγμένη.**

Π.χ. το σημείο Α με συντεταγμένες (2, 3), με τετμημένη το 2 και τεταγμένη το 3.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η ***συνάρτηση*** αντιστοιχεί κάθε τιμή μιας μεταβλητής **χ**
σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής **ψ**.

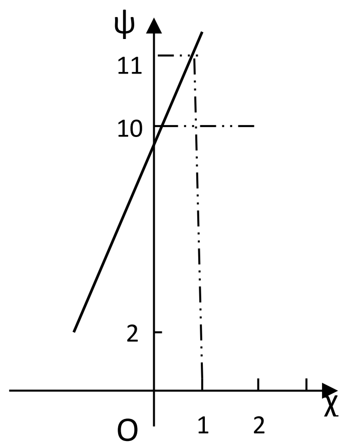
Π.χ. Οι μισθοί **χ** των υπαλλήλων αυξάνονται κατά **10** ευρώ ο καθένας.
Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό **ψ** ως ***συνάρτηση*** του παλιού μισθού **χ** είναι :

- ***τύπος*** συνάρτησης → $\boxed{ψ = χ + 10}$
- ***πίνακας τιμών*** → πίνακας με τα ζευγάρια (χ, ψ)

για χ = 0, ψ = 0 + 10, ψ = 10
για χ = 1, ψ = 1 + 10, ψ = 11

χ	0	1
ψ	10	11

(0,10), (1,11) κ.ά.



- ***γραφική παράσταση*** συνάρτησης → όλα τα (χ, ψ) στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ή ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = \alpha \cdot \chi$

Η ***συνάρτηση*** $\boldsymbol{\psi = \alpha \cdot \chi}$ εκφράζει τα ανάλογα ποσά.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha \cdot \chi$ είναι **ευθεία** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ***Ο(0, 0).***

Ανάλογα ποσά είναι αυτά που μεγαλώνουν ή μικραίνουν, κατά το ίδιο.

Στα ανάλογα ποσά, ο ***λόγος των τιμών*** τους **α** ***σταθερός*** $\alpha = \dfrac{\psi}{\chi}$.

α $\rightarrow$ ***συντελεστής αναλογίας*** ή **κλίση** της ευθείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση με ***τύπο***: $\boldsymbol{\psi = 5\chi}$ (κλίση ***α = 5***)

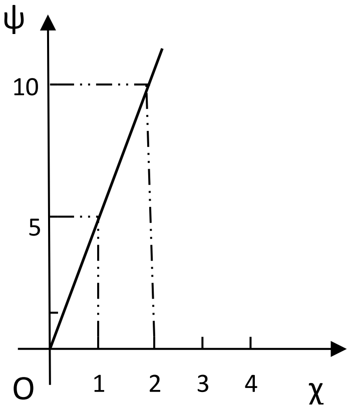
Πίνακας τιμών

για $\chi = \mathbf{0}$, $\psi = 5 \cdot 0$, $\psi = \mathbf{0}$

για $\chi = \mathbf{1}$, $\psi = 5 \cdot 1$, $\psi = \mathbf{5}$

για $\chi = \mathbf{2}$, $\psi = 5 \cdot 2$, $\psi = \mathbf{10}$

χ	0	1	2
ψ	0	5	10



γραφική παράσταση

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = \alpha \cdot \chi + \beta$ $(\beta \neq 0)$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha \cdot \chi + \beta$ $(\beta \neq 0)$ είναι **ευθεία**

- παράλληλη της ευθείας $\psi = \alpha \cdot \chi$
- διέρχεται από το σημείο **(0, β)** του άξονα ψ΄ψ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

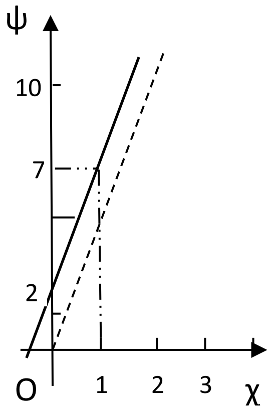
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 5 \cdot \chi + 2$

(κλίση ***α = 5***) είναι **ευθεία**

- παράλληλη της ευθείας $\psi = 5 \cdot \chi$
- διέρχεται από το σημείο **(0, 2)** του άξονα ψ΄ψ.

για $\chi = \mathbf{0}$, $\psi = 5 \cdot 0 + 2$, $\psi = \mathbf{2}$

για $\chi = \mathbf{1}$, $\psi = 5 \cdot 1 + 2$, $\psi = \mathbf{7}$



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = \dfrac{\alpha}{\chi}$ $(\chi \neq 0)$

Η **συνάρτηση** $\boldsymbol{\psi = \dfrac{\alpha}{\chi}}$ εκφράζει τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \dfrac{\alpha}{\chi}$ λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από ***2 κλάδους*** που ***δεν τέμνουν τους άξονες***.

- Αν $\alpha > 0$ οι κλάδοι βρίσκονται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο
- Αν $\alpha < 0$ οι κλάδοι βρίσκονται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

Μια υπερβολή έχει

- κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο(0, 0)
- άξονες συμμετρίας τις ευθείες $\psi = \chi$ και $\psi = -\chi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \dfrac{12}{\chi}$

είναι **παραβολή** (1ο και 3ο τεταρτημόριο)

Πίνακας τιμών - Γραφική παράσταση

για $\chi = \mathbf{-2}$, $\psi = \dfrac{12}{-2}$, $\psi = \mathbf{-6}$

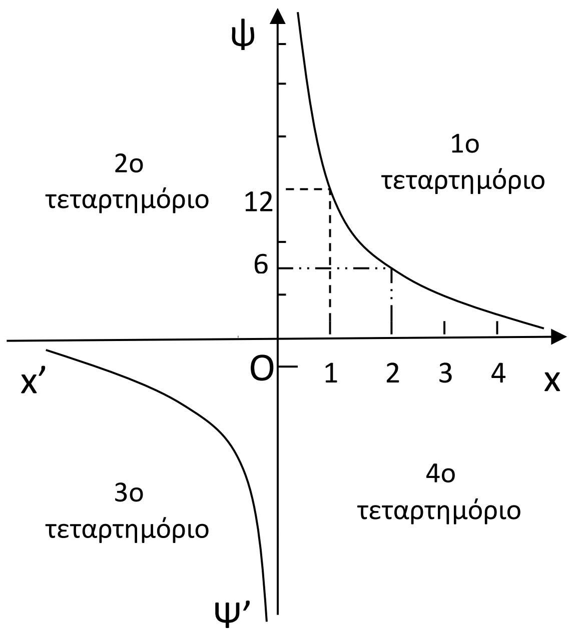
για $\chi = \mathbf{-1}$, $\psi = \dfrac{12}{-1}$, $\psi = \mathbf{-12}$

για $\chi = \mathbf{0}$ (δεν επιτρέπεται)

για $\chi = \mathbf{1}$, $\psi = \dfrac{12}{1}$, $\psi = \mathbf{12}$

για $\chi = \mathbf{2}$, $\psi = \dfrac{12}{2}$, $\psi = \mathbf{6}$

$\psi = \mathbf{0}$ (δεν επιτρέπεται)



χ	–2	–1	0	1	2	-
ψ	–6	–12	-	12	6	0

ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Π **περίμετρος** : το **άθροισμα** όλων των πλευρών του σχήματος

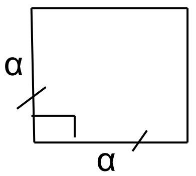
(το «γύρω – γύρω»)

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Ε **εμβαδόν:** η έκταση που καταλαμβάνει μια επίπεδη επιφάνεια στο επίπεδο

(πόσα «μικρά τετραγωνάκια» χωράει)

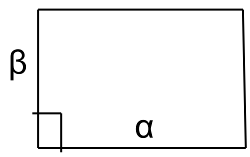
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



$Ε = α \cdot α = α^2$

$Π = α + α + α + α = 4α$

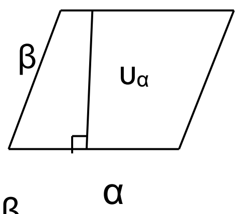
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ



$Ε = α \cdot β$

$Π = α + β + α + β = 2α + 2β$

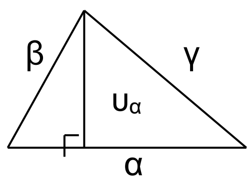
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ



$Ε = α \cdot υ_α$

$Π = α + β + α + β = 2α + 2β$

ΤΡΙΓΩΝΟ

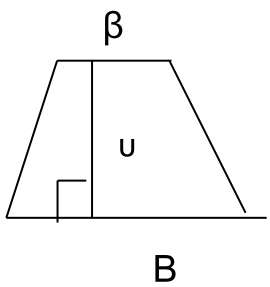


$Ε = \frac{1}{2} \cdot α \cdot υ_α$

$Π = α + β + γ$

ΤΡΑΠΕΖΙΟ

$Ε = \frac{1}{2} \cdot (Β + β) \cdot υ$



<u>ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

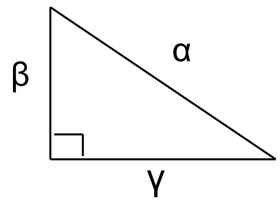
Να υπολογίσεις την ***περίμετρο*** και το ***εμβαδόν*** ενός ***τετραγώνου*** πλευράς 5 cm.

$α = 5$ cm

$Π = 4α = 4 \cdot 5 = 20$ cm

$Ε = α^2 = 5^2 = 25\ cm^2$

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

α : υποτείνουσα β,γ : κάθετες πλευρές

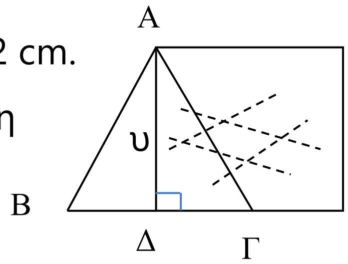
Σε ορθογώνιο τρίγωνο : Το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

(Σε ορθογώνιο τρίγωνο, με μια ορθή γωνία, σχέση ανάμεσα στις ***πλευρές***)

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ Π. Θ.

Αν σ΄ ένα τρίγωνο, **το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς** είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή και το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 10 cm, ΒΓ = 12 cm. Υπολόγισε το ***εμβαδόν*** του ***τετραγώνου*** που έχει πλευρά ίση με το ύψος του τριγώνου, από την κορυφή του.

ΛΥΣΗ : Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές → το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος →
→ $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm.

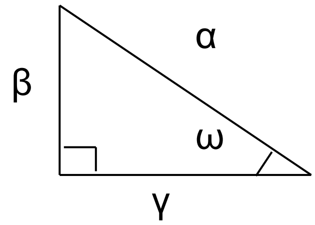
- Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο → υποτείνουσα ΑΒ = 10 cm,

κάθετες πλευρές ΑΔ = υ και ΒΔ = 6 cm. Σύμφωνα με το ***Πυθαγόρειο Θεώρημα*** →
→ $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ → $10^2 = \upsilon^2 + 6^2$ → $100 = \upsilon^2 + 36$ → $\upsilon^2 = 100 - 36$ →
→ $\upsilon^2 = 64$ → $\upsilon = \sqrt{64}$ → $\boxed{\upsilon = 8 \text{ cm}}$.

❖ Το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με το ύψος του τριγώνου α = υ = 8 cm, έχει εμβαδόν : $E = \alpha^2 = 8^2 = 64$ cm^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : Ε = 64 cm^2.

ΗΜΙΤΟΝΟ – ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ – ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ



Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο,
οι οξείες γωνίες έχουν 3 αριθμούς,
το **ημίτονο,** το **συνημίτονο** και την **εφαπτομένη.**

(Σε ορθογώνιο τρίγωνο, σχέση ανάμεσα στις ***πλευρές*** και τις ***οξείες γωνίες*** του)

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{β}{α}$$

$\boxed{0 < \text{ημω} < 1}$

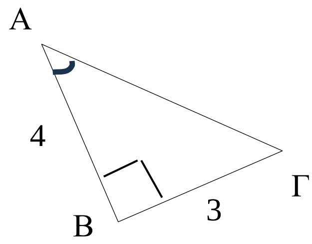
$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{γ}{α}$$

$\boxed{0 < \text{συνω} < 1}$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{β}{γ}$$

$\boxed{\text{εφω} = \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}}}$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ ($\hat{B} = 90^{o}$) με ΑΒ = 4 cm, ΒΓ = 3 cm, υπολόγισε τους ***τριγωνομετρικούς αριθμούς*** της γωνίας Α.

- Το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ορθογώνιο → υποτείνουσα ΑΓ = ; cm, κάθετες πλευρές ΑΒ = 4 cm και ΒΓ = 3 cm.

- Σύμφωνα με το ***Πυθαγόρειο Θεώρημα*** :

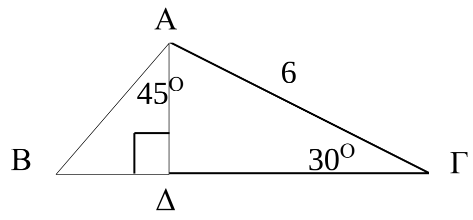
$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \rightarrow ΑΓ^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow ΑΓ^2 = 16 + 9 \rightarrow ΑΓ^2 = 25 \rightarrow ΑΓ = \sqrt{25} \rightarrow$
$\rightarrow ΑΓ = 5$ cm.

❖ $\text{ημ}\hat{A} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{3}{5}$ $\text{συν}\hat{A} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{4}{5}$ $\text{εφ}\hat{A} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{3}{4}$

ΛΥΜΕΝΗ ΑΣΚΗΣΗ

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το ΑΔ είναι ύψος, ΑΓ = 6 cm, $\hat{\Gamma} = 30^O$ και $\widehat{BA\Delta} = 45^O$.

Να δείξεις ότι :



Α) ΑΔ = 3 cm και ΔΓ = $\sqrt{27}$ cm

Β) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και ΒΔ =3 cm

Να υπολογίσεις :

Γ) Το ***εμβαδόν*** του τριγώνου ΑΒΓ.

Δίνεται $\sqrt{27} \simeq 5{,}2$ και ημ$30^O = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

Α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα ΑΓ =6 cm, κάθετες πλευρές ΑΔ = υ cm, ΔΓ = ; cm και γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta} = 30^O$.

- Με την ***τριγωνομετρία***, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ, θα έχουμε:

$$\eta\mu\hat{\Gamma} = \eta\mu 30^O = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow 2A\Delta = 6 \rightarrow \boxed{A\Delta = 3 \text{ cm}}.$$

- Με το ***Πυθαγόρειο Θεώρημα***, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ, θα έχουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \rightarrow 6^2 = 3^2 + \Delta\Gamma^2 \rightarrow 36 = 9 + \Delta\Gamma^2 \rightarrow \Delta\Gamma^2 = 36 - 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta\Gamma^2 = 27 \rightarrow \Delta\Gamma = \sqrt{27} \rightarrow \boxed{\Delta\Gamma \simeq 5{,}2 \text{ cm}}.$$

Β) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο, με $\widehat{BA\Delta} = 45^O \rightarrow \widehat{AB\Delta} = 90^O - 45^O = 45^O \rightarrow$

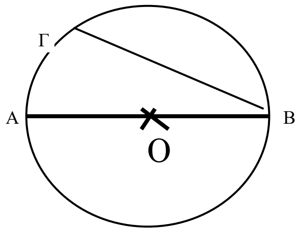
$\rightarrow$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές $\rightarrow$ $\boxed{B\Delta = A\Delta = 3 \text{ cm}}$.

Γ) Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο : $E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$

Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι :

$E = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta$ (ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 3 + 5,2 = 8,2 cm) (ΑΔ = 3 cm)

$E = \frac{1}{2} \cdot 8{,}2 \cdot 3 = 12{,}3 \text{ cm}^2$.

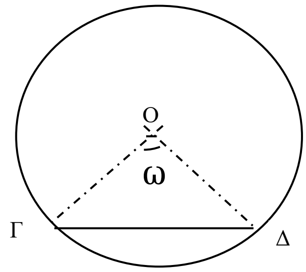


Ο : ***κέντρο*** κύκλου, **ρ** : ΟΑ = ΟΒ : ***ακτίνα*** κύκλου

δ : ΑΒ : ***διάμετρος*** **δ = 2ρ**

ΒΓ : ***χορδή*** $\overset{\frown}{B\Gamma}$: ***τόξο.***

$\hat{\omega}$ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ



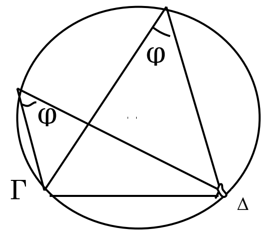
επίκεντρη γωνία : η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της ακτίνες του κύκλου.

αντίστοιχο τόξο της γωνίας: το τόξο ΓΔ που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας.

Το μέτρο της, είναι ίσο με το τόξο της. (π.χ. $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ = 60°, $\hat{\omega}$ = 60°)

Οι επίκεντρες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες.

$\hat{\varphi}$ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

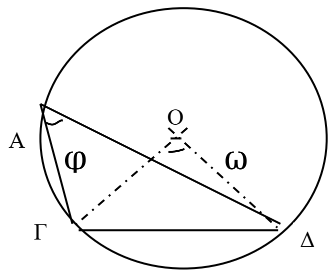


εγγεγραμμένη γωνία : η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της χορδές του κύκλου.

αντίστοιχο τόξο της λέγεται το τόξο ΓΔ που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας.

Το μέτρο της, είναι ίσο με το ***μισό*** του τόξου της. (π.χ. $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ = 60°, $\hat{\varphi}$ = 30°)

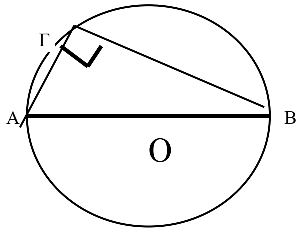
Οι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες.



Η εγγεγραμμένη και επίκεντρη που ***βαίνουν*** στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα συνδέονται με την σχέση: $\boldsymbol{\hat{\omega} = 2\hat{\varphi}}$

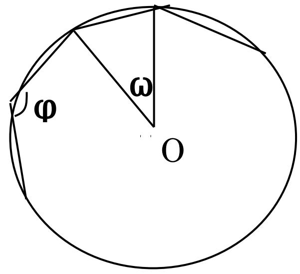
(π.χ. $\hat{\varphi}$ = 30°, $\hat{\omega} = 2 \cdot 30^{\circ} = 60^{\circ}$)

(π.χ. $\hat{\omega}$ = 60°, $\hat{\varphi} = \frac{60}{2} = 30^{\circ}$)



Ε γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η π ο υ β α ί ν ε ι σ ε η μ ι κ ύ κ λ ι ο ε ί ν α ι ο ρ θ ή.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ



κανονικό πολύγωνο : ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

ν : αριθμός πλευρών

(π.χ. ν = 3 ισόπλευρο τρίγωνο, ν = 4 τετράγωνο,
ν = 5 κανονικό πεντάγωνο, ν = 12 κανονικό δωδεκάγωνο)

Κάθε κανονικό πολύγωνο έχει έναν κύκλο που οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου και λέγεται **περιγεγραμμένος** και το κανονικό ν–γωνο **εγγεγραμμένο**.

κεντρική γωνία του πολυγώνου : η επίκεντρη γωνία $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ που «αντιστοιχεί» σε μια πλευρά του κανονικού ν–γώνου : $\boxed{\hat{\boldsymbol{\omega}} = \dfrac{360^0}{\nu}}$

γωνία του πολυγώνου : η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\varphi}$ που «σχηματίζεται» από δύο διαδοχικές πλευρές του κανονικού ν–γώνου.

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} = 180^0}$$

<u>ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Σε ένα κανονικό δωδεκάγωνο να υπολογίσεις τον ***αριθμό πλευρών***, την ***κεντρική γωνία*** και την ***γωνία του.***

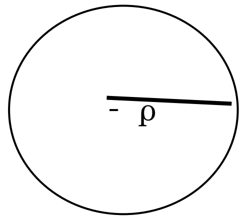
ν = 12 $\hat{\omega}$ = ; $\hat{\varphi}$ = ;

- αριθμός πλευρών δωδεκαγώνου → ν = 12.
- κεντρική γωνία : $\hat{\omega} = \dfrac{360^0}{\nu} = \dfrac{360^0}{12} = 30^O$. (ισότητα)
- γωνία του δωδεκαγώνου : $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^O$, $\hat{\varphi} + 30^O = 180^O$,
  $\hat{\varphi} = 180^O - 30^O$, $\hat{\varphi} = 150^O$. (εξίσωση)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : αριθμός πλευρών : 12, κεντρική γωνία : $\hat{\omega} = 30^O$,
γωνία του δωδεκαγώνου : $\hat{\varphi} = 150^O$.

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ $\boxed{L = 2\pi\rho}$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥ ΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ $\boxed{E = \pi\rho^2}$



όπου **π = 3,14**… (3,14159265358979323846 26…) (« π » από τη λέξη περιφέρεια, προς τιμήν του Έλληνα μαθηματικού Αρχιμήδη, 287 π.Χ. – 212 π.Χ.)

<u>ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

1) Να υπολογίσεις το ***μήκος*** του κύκλου και το ***εμβαδόν*** του κυκλικού δίσκου, που έχει ακτίνα 10 cm.

ρ = 10 cm   L = ;   E= ;

Μήκος κύκλου : **L = 2 π ρ** = $2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 6,28 \cdot 10 = 62,8$ cm   (ισότητα)

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: **E = π ρ²** = $3,14 \cdot 10^2 = 3,14 \cdot 100 = 314$ cm^2 (ισότητα)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : L = 62,8 cm E= 314 cm^2

---

2) Ένας κύκλος έχει μήκος 62,8 cm. Να υπολογίσεις την ***ακτίνα*** του.

L = 62,8 cm ρ = ;

L = 2 π ρ, $62,8 = 2 \cdot 3,14 \cdot \rho$, $62,8 = 6,28 \cdot \rho$, $\rho = \frac{62,8}{6,28}$, ρ = 10 cm (εξίσωση)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : ρ = 10 cm

---

3) Ένας κύκλος έχει μήκος 62,8 cm. Να υπολογίσεις το ***εμβαδόν*** του κυκλικού δίσκου.

Από το μήκος του κύκλου (L = 62,8 cm), θα υπολογίσω την ακτίνα (ρ = ;) και μετά το εμβαδόν (E = ;) του κυκλικού δίσκου.

L = 2 π ρ, $62,8 = 2 \cdot 3,14 \cdot \rho$, $62,8 = 6,28 \cdot \rho$, $\rho = \frac{62,8}{6,28}$, ρ = 10 cm (εξίσωση)

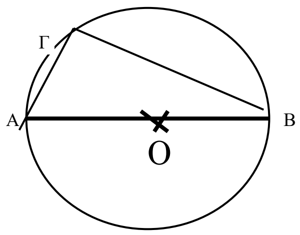
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου : **E = π ρ²** = $3,14 \cdot 10^2 = 3,14 \cdot 100 = 314$ cm^2 (ισότητα)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : **E** = 314 cm^2

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = 8cm και ΓΒ = 15 cm, σε έναν κύκλο με διάμετρο ΑΒ.

Να υπολογίσεις: **Α)** Την ***ακτίνα*** ρ του κύκλου
Β) Το ***μήκος*** του κύκλου **Γ)** Το ***εμβαδόν*** του κυκλικού δίσκου.



ΛΥΣΗ **:** Η γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα ΑΒ και κάθετες πλευρές ΑΓ, ΒΓ.

Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, θα έχουμε:

$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289.$ (ισότητα)

$AB^2 = 289, \ AB = \sqrt{289}, \ AB = 17.$ (εξίσωση)

Α) δ = ΑΒ = 2ρ, 17 = 2ρ, $\rho = \frac{17}{2}$, ρ = 8,5. (εξ.)

Β) Μήκος κύκλου : L = 2 π ρ = 2 · 3,14 · 8,5 = 6,28 · 8,5 = 53,38 cm. (ισ.)

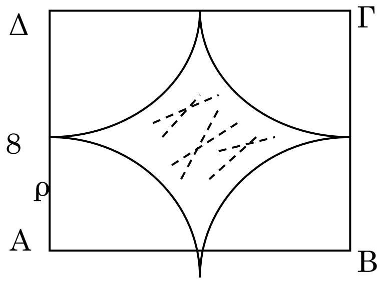
Γ) Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi \rho^2 = 3{,}14 \cdot 8{,}5^2 = 3{,}14 \cdot 100 = 226{,}865 \text{ cm}^2$. (ισ.)

---

2) Έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 8 cm. Να υπολογίσεις το ***εμβαδόν*** της γραμμοσκιασμένης καμπυλόγραμμης επιφάνειας.

ΛΥΣΗ **:** Μπορεί να υπολογιστεί **ως άθροισμα ή διαφορά άλλων γνωστών εμβαδών.** Από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ θα αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τεσσάρων τεταρτοκυκλίων, που είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα 4 cm. $\rho = \frac{A\Delta}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm

$$E_{\gamma\rho\alpha\mu.\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} - E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}$$



- ❖ $E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \alpha^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$
- $E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = \pi \rho^2 = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

$$E_{\gamma\rho\alpha\mu.\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = 64 - 50{,}24 = 9{,}76 \text{ cm}^2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : $E_{\gamma\rho\alpha\mu.\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = 9{,}76 \text{ cm}^2$
